数学の学びを**もっと**深めよう！

タイトル　微分・1

微分について.

○グラフ上の各点における瞬間的な傾きを求める計算方法.

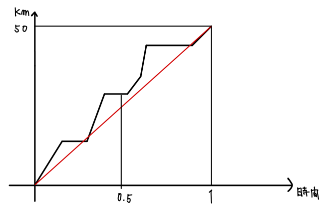
❓難しくて分からない…
という人の為に…

微分を日常的な例に置き換えると.分かりやすくなる.

例.「車の瞬間的な速度」

1時間で50km進んだ場合.速度は50km/hとなる.
平均速度

しかし.実際は.アクセルで加速したり.ブレーキで減速したり,瞬間ごとに車の速度は変わっている。



● 1時間で50km進むので50km/hとなる…平均速度.
→しかしこれでは0.5時間の場所を見た際 車は進んでいないことが分かる。

このように全体で見ると50km/hだが.範囲を狭めて見ると.
速度が違うことが分かるだろう。
範囲を極限まで狭め.「その瞬間での速度を求める」というのが"微分"である

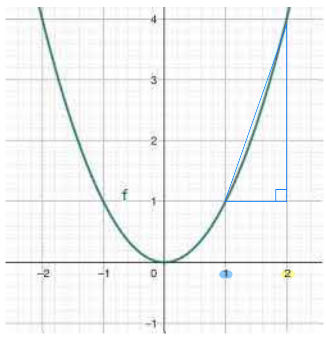
つまり.微分とは「その瞬間」を取り出すということ

大まかに理解できただろうか？

本題に入っていこう！

まず、2次関数 $y=x^2$ について.
xの値が1〜2まで変化する時.xの変化量に対するyの変化量の割合を求めていこう。

○$y=x^2$をグラフに表すと.



○xの変化量は $2-1$
○yの変化量は 2^2-1^2
である為.変化の割合は.

$$\frac{2^2-1^2}{2-1}=3$$

となり.
○この値は.グラフ上の2点(1,1)(2,4)を通る直線の傾きを表している。

下の2次関数のグラフにおいては,
xの値をa, yの値をbとおくと.
xの変化量 $=b-a$, yの変化量 $=b^2-a^2$ となる.

よって,関数 $y=f(x)$ において, xの値がa〜bまで変化する時.
○xの変化量 $=b-a$. ○yの変化量 $=f(b)-f(a)$
となる。

この時.xの変化量に対するyの変化量の割合は,

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

となり.
これを.**平均変化率**という.

例問1

関数 $f(x)=2x^2$ において, xの値が4〜9まで変化する時の平均変化率は?

(解) xの変化量 $=9-4=5$, yの変化量 $=(2\cdot 9^2)-(2\cdot 4^2)$
$=162-32$
$=180$

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}=\frac{(2\cdot 9^2)-(2\cdot 4^2)}{9-4}=\frac{180}{5}=26$$

変化率について理解できたかな? 26

次はxの変化率を限りなく0に近づけたらどうなるのかについて考えていきましょう!!

○先ほどの平均変化率をさらに発展させて考えてみる.
xの変化率 $b-a=h$ と置き換えると.
$b=a+h$ となり.平均変化率は,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}$$

と表わせる。

例問2

関数 $f(x)=2x^2$ において, xの値が 4〜$4+h$ まで変化する時の平均変化率は?

$$(\text{解})\ \frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{2(4+h)^2-2\cdot 4^2}{h}=\frac{2(h^2+8h+16)-32}{h}$$

$$=\frac{2h^2+16h+32-32}{h}=\frac{2h^2+16h}{h}=16+2h$$

16+2h

例問2のhの値を限りなく0に近づけると…

	…	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	…	0	…	0.0001	0.001	0.01	0.1	…	
	…	-15.8	-15.98	-15.998	-15.9998	…	16	…	15.9998	15.998	15.98	15.8	…	

Made with Goodnotes

タイトル　2

◎ 前ページの表から分かるように、16に限りなく近づいていく。

このことを、記号 lim を用いて次のように表わせる。

$$\lim_{h \to 0} (16+2h) = 16$$

この値16を h が限りなく0に近づくときの $16+2h$ の**極限値**という。

例題3

二次関数 $f(x) = 3x^2$ において、x の値が $1 \sim 1+h$ まで変化する時の平均変化率と、その極限値は？

(解) xの変化率 $= (1+h) - 1$、yの変化率 $= 3 \cdot (1+h)^2 - 3 \cdot 1^2$

$$\frac{y\text{の変化率}}{x\text{の変化率}} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{3 \cdot (1+h)^2 - 3 \cdot 1^2}{h} = \frac{3 \cdot (h^2+2h+1) - 3}{h}$$

$$= \frac{3h^2+6h+3-3}{h} = \frac{3h^2+6h}{h} = 6+3h$$

$$\lim_{h \to 0} (6+3h) = 6$$

平均変化率、$6+3h$ //

極限値、6 //

◎今までの内容をまとめると、

平均変化率 … $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

この式で h を限りなく0に近づけた時、平均変化率がある値に近づくならば、その極限値

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を関数 $f(x)$ の $x = a$ における"**微分係数**"といい、$f'(a)$ で表せる。

◎ 微分係数は「ある一点で関数がどれほど急に変化しているか」というのを示す指標だと思っておこう！

さて… 微分係数 $f'(a)$ を求められるようになったけれど…

正直長い‼と思いませんか…？

◎ということで、次は微分係数をもっと簡単に求められる方法を学んでみよう!!

まず、関数 $f(x) = x^2$ の $x = a$ における $f'(a)$ は

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ であり、この式を整理すると、

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h) = 2a$$

したがって、$f'(a) = 2a$ である。

◎ この式を用いて、求めたい x の値を a に代入することで、微分係数を求めることができる。

$x = 4$ における微分係数 $f'(4)$ は、先ほどの式に $a = 4$ を代入すれば求められる。

$f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$　となる。

・さて、この作業をあらゆる点で行なってみよう。すると、次の表で表わせる。

a	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	…
$f'(a)$	−10	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	10	…

○ a に対して $f'(a)$ の値が定まり、$f'(a)$ は a の関数となっている。

この時、a を x で置き変えて得られる関数、$f'(x) = 2x$ を $f(x) = x^2$ の**導関数**という。

◎また難しい内容…分からない!!という人もいるだろう…

ここで ONE POINT!!

数学で「分からない」「混乱する」など行きづまった時は、一旦、理屈より方法を知り、練習を重ね、使い方を理解した後に、結びつけて考えると分かり易くなるかも…？

その上で説明を読む!!という人は続きを…

もっと細部まで噛み砕いて説明しよう！

○まず、微分とは、「ある1点での変化の速さ＝微分係数」を求める作業、

・つまり結果は1つの数であり、これは「その場所での傾きの急さ」だけを教えてくれる。

○では、あらゆる場所で傾きを求めたら…

・「$x=0$，$x=1$，$x=2$，$x=3$ …の時の傾き」というようにあらゆる点で微分係数を計算していくと、

それぞれの x に対して必ず「傾きの値」が対応することになる。

一文でまとめると、

◎「場所 (x) を定めると、その場所の変化の速さ（傾き）が求められる」という関係を持った関数が新たに得られる。

これが、**導関数**である。

○そして、関数 $f(x)$ から その導関数 $f'(x)$ を求めることを"**微分する**"という。

つまり、導関数を求める＝微分をする となる。

Made with Goodnotes

数学の学びを**もっと**深めよう！

タイトル 3

○さて、超大切な前置きはここまでにして…
前ページでは $f(x)=x^2$ の関数を例に上げて説明しましたが、ここからは x^n の導関数の求め方について学んでいきましょう!!

○関数 $f(x)=x$ を微分してみよう。

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}1=1.$$

$f'(x)=1$

○関数 $f(x)=x^3$ を微分してみよう。

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2)$$
$$=3x^2$$

$f'(x)=3x^2$

すでに学んだように、
$(x)'=1$，$(x^2)'=2x$，$(x^3)'=3x^2$ である。
◎一般に次の公式が成り立つ。
n が整数のとき　$(x^n)'=nx^{n-1}$

例題4

関数 $f(x)=x^4$ を微分してみよう。
(解)　$f'(x)=4x^{4-1}=4x^3$　　$f'(x)=4x^3$

では $f(x)=3$ を微分すると…？

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3-3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}0=0$$

$f'(x)=0$

◎同様にして C を定数とする時、関数 $f(x)=C$ の導関数は次のようになる。
$f'(x)=(C)'=0$

○では x^n の導関数の求め方を知れたところで…
◎様々な関数の導関数を求めてみよう。

○関数 $f(x)=6x^2$ を微分してみよう。

(解) ・$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(h+x)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{6(h+x)^2-6x^2}{h}$
$$=\lim_{h\to0}\frac{6(h^2+2xh+x^2)-6x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{6h^2+12xh+6x^2-6x^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{6h^2+12xh}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(12x+6h)=12x$$

$f'(x)=12x$

・$(6x^2)'=6(x^2)'=6\cdot2x=12x$ となる。

○このことから次の式が成り立つ。
$\{kf(x)\}'=kf'(x)$　(kは定数)

○関数 $f(x)=2x^2+4x$ を微分してみよう。

(解)．・$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{2(x+h)^2+4(x+h)\}-2x^2+4x}{h}$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{2(x^2+2xh+h^2)+4x+4h\}-(2x^2+4x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2x^2+4xh+2h^2+4x+4h-2x^2-4x}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2h^2+4xh+4h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2h(h+2x+2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}2(2x+2+h)=2\cdot2x+4=4x+4$$

$f'(x)=4x+4$

・$(2x^2+4x)'=(2x^2)'+(4x)'=2(x^2)'+4(x)'$
$=2\cdot2x+4\cdot1=4x+4$　となる。

○このことから、次の式が成り立つ。
$\{f(x)\pm g(x)\}'=f'(x)\pm g'(x)$

例題5

関数 $f(x)=(2x+1)(x^2-3)$ を微分しよう。

(解) まず、$(2x+1)(x^2-3)$ を展開しよう。
$(2x+1)(x^2-3)=2x^3-6x+x^2-3$
$=2x^3+x^2-6x-3$ …①

①を微分してみよう。
$f'(x)=(2x^3+x^2-6x-3)'$
$=2(x^3)'+(x^2)'-6(x)'-(3)'$
$=2\cdot3x^2+2x-6\cdot1-0$
$=6x^2+2x-6$　　$f'(x)=6x^2+2x-6$

Made with Goodnotes